

# Návrh suboptimálního aktivního detektoru a generátoru vstupního signálu

Ivo Punčochář

Katedra kybernetiky

a

Výzkumné centrum DAR

Fakulta aplikovaných věd

Západočeská univerzita v Plzni

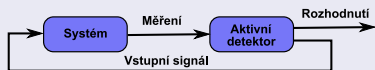
28. dubna 2009

# Obsah

- 1 Úvod, motivace a cíle
- 2 Optimální aktivní detektor a generátor
- 3 Aktivní detektor a generátor pro speciální úlohu
- 4 Numerický příklad
- 5 Závěrečné poznámky

# Úvod, motivace a cíle

## Pasivní a aktivní detekce



- Pasivní detekce

- Pasivní detektor využívá dostupnou informaci (model a měření) a generuje pouze rozhodnutí.
- $\oplus$  značná rozšířenost, teoretická jednoduchost, malé výpočetní nároky;  $\ominus$  nižší kvalita detekce

- Aktivní detekce

- Aktivní detektor využívá dostupnou informaci a kromě rozhodnutí ovlivňuje systém s cílem zvýšit kvalitu rozhodnutí.
- $\oplus$  Vyšší kvalita detekce (rychlost, přesnost, atd.);  $\ominus$  teoreticky složitější, vyšší výpočetní nároky

# Úvod, motivace a cíle

## Dosažené výsledky

- Obecná formulace a formální řešení problému aktivní detekce a řízení pro nelineární stochastický systém
- Diskuze tří speciálních případů
  - 1 Aktivní detektor pro daný generátor vstupního signálu
  - 2 **Aktivní detektor a generátor vstupního signálu (ADG)**
  - 3 Aktivní detektor a regulátor
- Návrh suboptimálního aktivního detektoru a generátoru vstupního signálu s využitím techniky postupujícího horizontu (receding/rolling horizon);  $\ominus$  nelze použít pro některé speciální úlohy

# Úvod, motivace a cíle

## Cíle prezentace

- 1 Formulovat a řešit problém návrhu optimálního aktivního detektoru a generátoru vstupního signálu při použití vícemodelového popisu systému (lineární gaussovské modely)
- 2 Odvodit optimální řešení pro speciální úlohu, kdy nedochází k přepínání modelů a rozhodnutí má být učiněno až po získání posledního měření (motivace v [L. Blackmore and B. C. Williams, 2006])
- 3 Představit dvě aproximativní techniky návrhu aktivního detektoru a generátoru vstupního signálu pro speciální úlohu

# Formulace problému návrhu optimálního ADG

Popis systému v časových okamžicích  $k \in \mathcal{T} = \{0, 1, \dots, F\}$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}(\mu_k) \mathbf{x}_k + \mathbf{B}(\mu_k) \mathbf{u}_k + \mathbf{G}(\mu_k) \mathbf{w}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}(\mu_k) \mathbf{x}_k + \mathbf{H}(\mu_k) \mathbf{v}_k \quad (2)$$

$[\mathbf{x}_k^T, \mu_k]^T$  – stav,  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $\mu_k \in \mathcal{M} = \{1, \dots, N\}$

$\mathbf{u}_k \in \mathcal{U}_k \subseteq \mathbb{R}^{n_u}$  – vstup,  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$  – výstup

$\mathcal{N}\{\mathbf{w}_k : \mathbf{0}, \mathbf{I}\}$  – stavový šum,  $\mathcal{N}\{\mathbf{v}_k : \mathbf{0}, \mathbf{I}\}$  – výstupní šum

$\mathcal{N}\{\mathbf{x}_0 : \hat{\mathbf{x}}'_0, \mathbf{P}'_{0,x}\}$  – počáteční podmínka

$P_{i,j} = P(\mu_{k+1}=j | \mu_k=i)$  – pravděpodobnosti přechodů

$P(\mu_0)$  – počáteční podmínka

# Formulace problému návrhu optimálního ADG

## Aktivní detektor a generátor

$$\begin{bmatrix} d_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} = \rho_k(\mathbf{l}_0^k) \quad (3)$$

$d_k \in \mathcal{M}$  – rozhodnutí (bodový odhad  $\mu_k$ )

$\rho_k(\mathbf{l}_0^k)$  – neznámá funkce popisující ADG v čase  $k$

$\mathbf{l}_0^k = [\mathbf{y}_0^k, \mathbf{u}_0^{k-1}, d_0^{k-1}]^T$  – informace dostupná v čase  $k$

# Formulace problému návrhu optimálního ADG

## Cíl

Cílem je nalézt popis optimálního aktivního detektoru a generátoru (tj. posloupnost funkcí  $\rho_k(\mathbf{I}_0^k)$ ,  $k \in \mathcal{T}$ ) tak, aby byly minimalizovány průměrné ztráty způsobené nesprávnými rozhodnutími.

## Kritérium

$$J(\rho_0^F) = \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=0}^F L_k^d(\mu_k, d_k) \right\} \rightarrow \min \quad (4)$$

$L_k^d(\mu_k, d_k)$  – ztrátová funkce splňující podmínku

$$L_k^d(\mu_k, \mu_k) \leq L_k^d(\mu_k, d_k), \forall \mu_k, d_k \in \mathcal{M}, d_k \neq \mu_k, \exists k \leq F$$



# Návrh optimálního aktivního detektoru a generátoru

## Zpětná rekurzivní rovnice

$$V_k^* \left( \mathbf{y}_0^k, \mathbf{u}_0^{k-1} \right) = \min_{d_k \in \mathcal{M}} \mathbb{E} \left\{ L_k^d \left( \mu_k, d_k \right) \mid \mathbf{y}_0^k, \mathbf{u}_0^{k-1}, d_k \right\} + \min_{\mathbf{u}_k \in \mathcal{U}_k} \mathbb{E} \left\{ V_{k+1}^* \left( \mathbf{y}_0^{k+1}, \mathbf{u}_0^k \right) \mid \mathbf{y}_0^k, \mathbf{u}_0^k \right\} \quad (5)$$

$V_k^* \left( \mathbf{y}_0^k, \mathbf{u}_0^{k-1} \right)$  – Bellmanova funkce

$V_{F+1}^* = 0$  – počáteční podmínka pro zpětnou rekurzi

$$J \left( \rho_0^{F*} \right) = \mathbb{E} \left\{ V_0^* \left( \mathbf{y}_0 \right) \right\}$$

# Návrh optimálního aktivního detektoru a generátoru

## Optimální aktivní detektor a generátor

$$d_k^* = \arg \min_{d_k \in \mathcal{M}} \mathbb{E} \left\{ L_k^d(\mu_k, d_k) \mid \mathbf{y}_0^k, \mathbf{u}_0^{k-1}, d_k \right\} \quad (6)$$

$$\mathbf{u}_k^* = \arg \min_{\mathbf{u}_k \in \mathcal{U}_k} \mathbb{E} \left\{ V_{k+1}^* \left( \mathbf{y}_0^{k+1}, \mathbf{u}_0^k \right) \mid \mathbf{y}_0^k, \mathbf{u}_0^k \right\} \quad (7)$$

Optimální rozhodnutí  $d_k^*$  minimalizuje průměrnou aktuální ztrátu a optimální vstup  $\mathbf{u}_k^*$  minimalizuje průměrné budoucí ztráty.

# Formulace speciální úlohy

## Doplňující předpoklady k původní formulaci

- Nedochozí k přepínání mezi modely

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i = j \\ 0 & \text{pokud } i \neq j \end{cases} \quad (8)$$

- Pouze rozhodnutí  $d_F$  je významné

$$L_k^d(\mu_k, d_k) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } d_k \neq \mu_k \wedge k = F \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (9)$$

Poznámka: Vliv na řešení zpětné rekurzivní rovnice a odhadu stavu.

# Optimální návrh aktivního detektoru a generátoru

Časový okamžik  $k = F$

$$V_F^* \left( \mathbf{y}_0^F, \mathbf{u}_0^{F-1} \right) = \min_{d_F \in \mathcal{M}} \mathbb{E} \left\{ L_F^d \left( \mu_F, d_F \right) \mid \mathbf{y}_0^F, \mathbf{u}_0^{F-1}, d_F \right\} +$$

$$\underbrace{\min_{\mathbf{u}_F \in \mathcal{U}_F} \mathbb{E} \left\{ V_{F+1}^* \left( \mathbf{y}_0^{F+1}, \mathbf{u}_0^F \right) \mid \mathbf{y}_0^F, \mathbf{u}_0^F \right\}}_0 \quad (10)$$

# Optimální návrh aktivního detektoru a generátoru

Časový okamžik  $k = F$

$$V_F^* (\mathbf{y}_0^F, \mathbf{u}_0^{F-1}) = \min_{d_F \in \mathcal{M}} \mathbb{E} \left\{ L_F^d (\mu_F, d_F) | \mathbf{y}_0^F, \mathbf{u}_0^{F-1}, d_F \right\} \quad (10)$$

S ohledem na zvolenou ztrátovou funkci odpovídá optimální rozhodnutí  $d_F^*$  modelu s maximální aposteriorní pravděpodobností a optimální vstup  $\mathbf{u}_F^*$  může být libovolný.

# Optimální návrh aktivního detektoru a generátoru

Časové okamžiky  $k = F - 1, \dots, 0$

$$V_k^* (\mathbf{y}_0^k, \mathbf{u}_0^{k-1}) = \overbrace{\min_{d_k \in \mathcal{M}} \mathbb{E} \left\{ L_k^d (\mu_k, d_k) \mid \mathbf{y}_0^k, \mathbf{u}_0^{k-1}, d_k \right\}}^0 + \min_{\mathbf{u}_k \in \mathcal{U}_k} \mathbb{E} \left\{ V_{k+1}^* (\mathbf{y}_0^{k+1}, \mathbf{u}_0^k) \mid \mathbf{y}_0^k, \mathbf{u}_0^k \right\} \quad (11)$$

# Optimální návrh aktivního detektoru a generátoru

Časové okamžiky  $k = F - 1, \dots, 0$

$$V_k^* \left( \mathbf{y}_0^k, \mathbf{u}_0^{k-1} \right) = \min_{\mathbf{u}_k \in \mathcal{U}_k} \mathbb{E} \left\{ V_{k+1}^* \left( \mathbf{y}_0^{k+1}, \mathbf{u}_0^k \right) \mid \mathbf{y}_0^k, \mathbf{u}_0^k \right\} \quad (11)$$

Optimální rozhodnutí  $d_k^*$  může být libovolné a optimální vstup  $\mathbf{u}_k^*$  minimalizuje předpokládané budoucí ztráty.

# Suboptimální návrh aktivního detektoru a generátoru

## Suboptimální techniky návrhu

- 1 Návrh využívající horní mez bayesovského risku
  - Záměna operátorů minima a střední hodnoty
  - Nahrazení bayesovského risku jeho horní mezí
- 2 Návrh využívající strategii s omezeným horizontem optimalizace  $I$  ( $I$  step rollout policy)
  - Optimální výpočet prvních  $I$  kroků (numericky)
  - Nahrazení skutečné Bellmanovy funkce  $V_{k+I}^*(\mathbf{y}_0^{k+I}, \mathbf{u}_0^{k+I-1})$  funkcí  $\bar{V}_{k+I}(\mathbf{y}_0^{k+I}, \mathbf{u}_0^{k+I-1})$ , která reprezentuje průměrné budoucí ztráty při použití nějaké suboptimální strategie (base policy)



# Suboptimální návrh využívající bayesovský risk

## Záměna operátorů minima a střední hodnoty

- Postupné dosažení  $V_F^* \rightarrow \dots \rightarrow V_k^* \rightarrow \dots \rightarrow V_1^* \rightarrow V_0^*$

$$V_0^*(\mathbf{y}_0) = \min_{\mathbf{u}_0 \in \mathcal{U}_0} \mathbb{E} \left\{ \min_{\mathbf{u}_1 \in \mathcal{U}_1} \mathbb{E} \left\{ \dots \min_{\mathbf{u}_{F-1} \in \mathcal{U}_{F-1}} \mathbb{E} \{ \dots \} \dots \mid \mathbf{y}_0^1, \mathbf{u}_0^1 \right\} \mid \mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0 \right\}$$

- Záměna operátorů minima a střední hodnoty

$$V_0^*(\mathbf{y}_0) \leq \min_{\substack{\mathbf{u}_0^{F-1} \\ \mathbb{R}^{F n_y}}} \int \min_{d_F \in \mathcal{M}} \overbrace{\sum_{\substack{\mu_F=1 \\ \mu_F \neq d_F}}^N p(\mathbf{y}_1^F \mid \mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0^{F-1}, \mu_F) P(\mu_F \mid \mathbf{y}_0)}^{\text{bayesovský risk } \epsilon} d\mathbf{y}_1^F$$

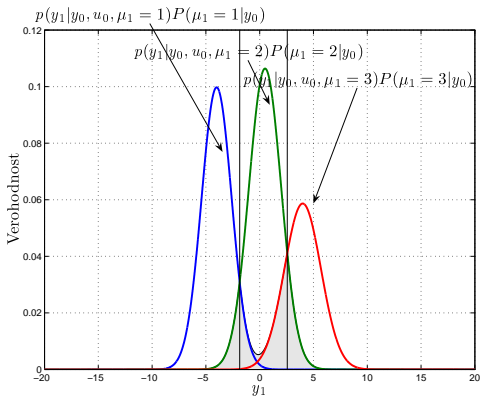
# Suboptimální návrh využívající bayesovský risk

## Poznámky k bayesovskému risku

- Pro uvažovanou ztrátovou funkci  $L_k^d(\mu_k, d_k)$  vyjadřuje apriorní pravděpodobnost chybného rozhodnutí
- Hustoty  $p(\mathbf{y}_1^F | \mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0^{F-1}, \mu_F)$  mají gaussovské rozdělení se středními hodnotami  $\hat{\mathbf{y}}_1^F(\mu_F)$  a kovariančními maticemi  $\mathbf{P}'_y(\mu_F)$
- Střední hodnoty  $\hat{\mathbf{y}}_1^F(\mu_F)$  závisí na sekvenci vstupů  $\mathbf{u}_0^{F-1}$  lineárně a kovarianční matice  $\mathbf{P}'_y(\mu_F)$  na vstupech nezávisí

# Suboptimální návrh využívající bayesovský risk

## Příklad bayesovského risku pro tři modely



# Suboptimální návrh využívající bayesovský risk

## Horní mez pro bayesovský risk

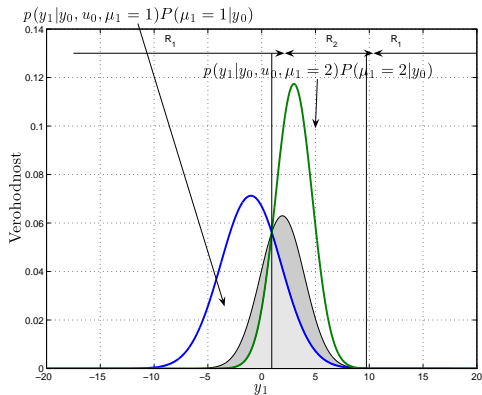
$$\epsilon(\mathbf{u}_0^{F-1}) \leq \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sqrt{P(\mu_F = i | \mathbf{y}_0) P(\mu_F = j | \mathbf{y}_0)} \exp(-D_{i,j}),$$

kde  $D_{i,j}$  je Bhattacharrya vzdálenost mezi gaussovskými hustotami  $p(\mathbf{y}_1^F | \mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0^{F-1}, \mu_F = i)$  a  $p(\mathbf{y}_1^F | \mathbf{y}_0, \mathbf{u}_0^{F-1}, \mu_F = j)$

- Horní mez lze vyčíslit analyticky
- $D_{i,j}$  je kvadratická funkce (konkávní) vektoru  $\mathbf{u}_0^{k-1} \in \mathcal{U} \Rightarrow$  minimalizace pomocí sekvenčního kvadratického programování

# Suboptimální návrh využívající bayesovský risk

Příklad horní meze bayesovského risku pro dva modely



# Suboptimální návrh využívající strategii s omezeným horizontem optimalizace

## Strategie s omezeným horizontem optimalizace $l$

- Výpočet Bellmanových funkcí  $V_k$  až  $V_{k+l-1}$  pomocí diskretizace, dopředné rekurze a numerické integrace
- Bellmanova funkce  $V_{k+l}^*(\mathbf{y}_0^{k+l}, \mathbf{u}_0^{k+l-1})$  je nahrazena funkcí

$$\bar{V}_{k+l}(\mathbf{y}_0^{k+l}, \mathbf{u}_0^{k+l-1}) = \min_{\mathbf{u}_{k+l}^{F-1}} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \exp(-D_{i,j})$$

$$\sqrt{P(\mu_F = i | \mathbf{y}_0^{k+l}, \mathbf{u}_0^{k+l-1}) P(\mu_F = j | \mathbf{y}_0^{k+l}, \mathbf{u}_0^{k+l-1})}$$

# Suboptimální návrh využívající strategii s omezeným horizontem optimalizace

## Strategie s omezeným horizontem optimalizace $l$

- V této situaci je  $D_{i,j}$  Bhattacharrya vzdálenost mezi gaussovskými hustotami pravděpodobnosti

$$p\left(\mathbf{y}_{k+l+1}^F | \mathbf{y}_0^{k+l}, \mathbf{u}_0^{F-1}, \mu_F = i\right) \text{ a } p\left(\mathbf{y}_{k+l+1}^F | \mathbf{y}_0^{k+l}, \mathbf{u}_0^{F-1}, \mu_F = j\right)$$

- Oproti základní strategii (base policy) vede tato strategie s omezeným horizontem optimalizace (rollout policy) na stejné nebo lepší výsledky (narozdíl od techniky postupujícího horizontu).

# Numerický příklad

## Příklad - aktivní detekce pro dva skalární modely

$\mu_k$	$a_k(\mu_k)$	$b_k(\mu_k)$	$g_k(\mu_k)$	$c_k(\mu_k)$	$h_k(\mu_k)$
1	-0.9	1.0	$\sqrt{0.5}$	1.5	$\sqrt{0.5}$
2	0.5	1.5	$\sqrt{0.5}$	1.5	$\sqrt{0.5}$

- Délka horizontu detekce  $F = 3$
- Počáteční podmínky  $P(\mu_0 = 1) = P(\mu_0 = 2) = 0.5$ ,  $\hat{\mathbf{x}}'_0 = 0$  a  $\mathbf{P}'_{0,x} = 0.1$
- Množina vstupů  $\mathcal{U}_k = \{-0.1, 0.1\}$ ,  $\forall k \in \mathcal{T}$
- Délka optimalizačního horizontu  $l = 1$



# Numerický příklad

## Výsledky 1000 Monte Carlo simulací

Metody návrhu ADG	$\hat{J}$	$\text{var}\hat{J}$	Čas [s]
Horní mez BR	0.3430	2.2756E-4	0.0085
Bayesovský risk	0.3380	2.3843E-4	6.0872
Omezený horizont opt.	0.3350	2.4116E-4	1.1104
Optimální	0.3300	2.4380E-4	53.4573

# Závěrečné poznámky

## Shrnutí

- Oba suboptimální návrhy aktivního detektoru a generátoru vstupního signálu byly získány z optimálního řešení aplikací různých aproximací
- Suboptimální aktivní detektor a generátor vstupního signálu založený na minimalizaci horní meze bayesovském risku je v podstatě shodný s přístupem publikovaným v [L. Blackmore and B. C. Williams, 2006]
- Suboptimální aktivní detektor a generátor vstupního signálu založený na strategii s omezeným optimalizačním horizontem může dosahovat kvalitnější detekce

# Závěrečné poznámky

## Směry budoucího výzkumu

- Analýza vlivu využití horní meze bayesovského risku na výsledek optimalizace - analytická nebo s využitím vhodné dolní meze bayesovského risku
- Hledání těsnější horní meze bayesovského risku
- Hledání obecných charakteristik systémů, u kterých lze předpokládat výraznější zvýšení kvality při použití aktivního detektoru